

№. экз. билета 501

Наименование дисциплины:

Действительный и комплексный анализ (2 курс, 4 семестр)

1. Собственные интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность и интегрируемость по параметру в случаях постоянных и переменных пределов интегрирования.
2. Теорема об образе области. Принцип максимума модуля аналитической функции.
3. Доказать, что ряд Фурье по ортонормированной замкнутой системе сходится по норме.
4. Пусть $f(x, y)$ непрерывна на множестве $[a, +\infty) \times Y$ и для любого $y \in Y$ существует $I(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$. Верно ли, что $I(y)$ непрерывна на Y ? Ответ обосновать.

1

нв ψ_n - ОН, замкн. $\forall f$

Попр, $\forall \varepsilon > 0 \exists C_1, \dots, C_n$

$$\|f - \sum_{k=1}^n C_k \psi_k\| < \varepsilon$$

Рассм $\sum_{k=1}^n f_k \psi_k$ - ~~для~~ ТРФ f

Для чего известно: $\|f - \sum_{k=1}^n f_k \psi_k\| \leq$

$$\leq \|f - \sum_{k=1}^n C_k \psi_k\| \quad \text{для } \{C_k\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ для f ~~дан~~ $\forall f, \forall \varepsilon > 0 \exists N$

$$\|f - \sum_{k=1}^N f_k \psi_k\| \leq \|f - \sum_{k=1}^N C_k \psi_k\| \leq \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по сур. $\sum_{k=1}^N f_k \psi_k$ сч-ся к f по норме

24

$$f(x, y) \in C[a; +\infty) \times Y, \forall y \in Y$$

$$\exists I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx$$

Пусть $u(x) = \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^y}, Y = (1, 2]$

Древ., $f(x, y)$ вып., эк-ва непрерывны

Но по-прежнему эк-ва не:

$$\# \cdot \exists \varepsilon > 0: \forall R \geq 1 \exists R_1, \exists y_0:$$

$$\left| \int_{R_1}^{\infty} \frac{dx}{x^{y_0}} \right| = \frac{x^{1-y_0}}{1-y_0} \Big|_{R_1}^{\infty} = \frac{1}{(y_0-1)R_1^{y_0-1}}$$

$$\Rightarrow y_0 = 1 + \frac{1}{R}, R_1 = R^2 = \frac{R}{R^{1/2}} \geq 1 = \varepsilon$$

Теорема 4.

Если ОНС $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута в $E(\tilde{E})$, то для любого $f \in E(\tilde{E})$ его ряд Фурье сходится к f по норме:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n f_k \psi_k - f \right\| = 0. \quad (3)$$

Доказательство. В силу тождества Бесселя (7) теоремы 1 о наилучшем приближении

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \psi_k - f \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2,$$

а правая часть здесь стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. ■

Теорема 1.

Среди всевозможных линейных комбинаций элементов $\psi_1, \dots, \psi_n$ ОН системы n -я частичная сумма ряда Фурье (5) дает наименьшее отклонение по норме от f , причем выполнено равенство

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \psi_k - f \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2. \quad (7)$$

Теорема 3.

Если ОНС $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута в $E(\tilde{E})$, то для любого $f \in E(\tilde{E})$ неравенство Бесселя переходит в точное равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2 \quad (2)$$

(называемое **равенством Парсеваля**).

Равенство

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \psi_k - f \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2 \quad (7)$$

принято называть **тождеством Бесселя**.

№. экз. билета 902

Наименование дисциплины:

Действительный и комплексный анализ (2 курс, 4 семестр)

1. Собственные интегралы, зависящие от параметра.
Дифференцируемость по параметру в случаях постоянных и переменных пределов интегрирования.
2. Дифференцируемость функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана. Аналитичность.
3. Пусть ортонормированная система $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n, \dots$ полна в евклидовом пространстве E . Останется ли она полной, если первые два элемента этой системы заменить на элементы $e_1 + e_2, e_1 - e_2$?
Ответ обосновать.
4. Пусть $f(x, y)$ непрерывна на множестве $[a, +\infty) \times Y$ и для любого $y \in Y$ существует $I(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$, причем $I(y)$ непрерывна на Y . Верно ли, что $I(y)$ сходится равномерно на Y ? Ответ обосновать.

Во втором пункте надо было также сформулировать аналитичность и соответственно дифференцируемость через условия Коши-Римана.

Возможно надо подробнее расписать 4 номер, но Хайлову и так зашло.

3. f орт $\{e_1, \dots, e_n\}$ ^{норм ена} $\Leftrightarrow f=0$ (2) по орт.

f орт $\{e_1, \dots, e_n\} \Leftrightarrow f$ орт $\{e_1+e_2, e_1-e_2, \dots, e_n\}$ (3)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \langle f, e_1 \rangle = 0 \\ \langle f, e_2 \rangle = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \langle f, e_1+e_2 \rangle = 0 \\ \langle f, e_1-e_2 \rangle = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftarrow \begin{cases} \langle f, e_1+e_2 \rangle = 0 \\ \langle f, e_1-e_2 \rangle = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \langle f, e_1 \rangle + \langle f, e_2 \rangle = 0 \\ \langle f, e_1 \rangle - \langle f, e_2 \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \langle f, e_1 \rangle = 0, \langle f, e_2 \rangle = 0 \end{aligned}$$

(1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Rightarrow f=0 \Leftrightarrow f$ орт $\{e_1+e_2, e_1-e_2, \dots, e_n\}$.

$\Rightarrow$ система полная по определению.

N3 $e_1, e_2, \dots, e_n$ - орт в $E \Rightarrow \{ \langle f, e_k \rangle = 0, \forall k = \overline{1, n} \}$
 $\Leftrightarrow f \equiv 0$.

$e_1+e_2, e_1-e_2, e_3, \dots, e_n$: пусть $f \in E$:

$$\begin{cases} \langle f, e_k \rangle = 0, k = \overline{3, n}, \\ \langle f, e_1+e_2 \rangle = 0 \\ \langle f, e_1-e_2 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle f, e_k \rangle = 0, k = \overline{3, n} \\ \langle f, e_1 \rangle + \langle f, e_2 \rangle = 0 \\ \langle f, e_1 \rangle - \langle f, e_2 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle f, e_k \rangle = 0, k = \overline{3, n} \\ \langle f, e_1 \rangle = 0 \\ \langle f, e_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \langle f, e_k \rangle = 0, k = \overline{1, n} \Leftrightarrow f \equiv 0$ (из полноты $e_1, e_2, \dots, e_n$)
 $\Rightarrow e_1+e_2, e_1-e_2, \dots, e_n$ орт в E .

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin \pi x y, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{2}{y} \\ 0, & \text{если } x > \frac{2}{y} \end{cases} \quad x \geq 0, 0 < y \leq 1$$

при $y = 0, x \geq 0 \quad f(x, 0) = 0$

$$I(y) = \int_0^{+\infty} f(x, y) dx$$

$$I'(y) = 0 \text{ при любом } y \Rightarrow I(y) \text{ вып.}$$

и св. при фикс. y . Однако св. несправ. отн. y на $[0, 1]$:

$$\exists \varepsilon = 1 \quad \forall A_0 > \frac{1}{2} \quad \exists y^* = \frac{1}{A_0} \quad \text{на } \Sigma A_0:$$

$$\left| \int_{A_0}^{+\infty} f(x, y^*) dx \right| = \left| \int_{A_0} \sin \frac{\pi x}{A_0} dx \right| =$$

$$= \frac{A_0}{\pi} \cos \frac{\pi x}{A_0} \Big|_{A_0}^{2A_0} = \frac{2A_0}{\pi} > \varepsilon = 1$$

№. экз. билета 503

Наименование дисциплины:

Действительный и комплексный анализ (2 курс, 4 семестр)

1. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости.

2. Логарифмический вычет. Принцип аргумента.

3. Доказать, что если тригонометрический ряд Фурье непрерывной функции $y = f(x)$ сходится в точке x_0 , то он сходится именно к значению $f(x_0)$.

4. Доказать, что бета-функция $B(x, y)$ является непрерывной на всей своей области определения.

④ Гамма-ф-ция $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$ непер. на всей обл. определ-я ($p > 0$). Кроме того, $\Gamma(p) > 0$.

По ф-ле связи между B -и Γ -ф-циями:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p, q > 0$$

$\Rightarrow B(p, q)$ непер. как композиция непер. ф-ций.

3.)

нз

на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

Если $f(x)$ непрерывна, то она интегрируема в этой области. Для любой $\epsilon > 0$, найдутся некоторые $\delta_1(x_0 + 0), \delta_2(x_0 - 0) \Rightarrow$ по локальной теореме Фейбеля,
 ГРФ $\delta_n \rightarrow \frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)) = f(x_0)$

нз

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad - \text{Оур.} \quad \forall x > 0, y > 0$$

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad - \text{непр., Г.К.}$$

непрерывна для $\Gamma(x)$ непр. $\forall x > 0, \Gamma(x) \neq 0$

(можно доказать непр-ть $\Gamma(x)$ равномерной сходимостью на любом отрезке, но не нужно)

№. экз. билета 504

Наименование дисциплины:

Действительный и комплексный анализ (2 курс, 4 семестр)

1. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Признак Дирихле-Абея равномерной сходимости.
2. Теорема Руше о нулях аналитической функции.
3. Доказать, что любая функция, аналитическая в расширенной комплексной плоскости без нуля и имеющая в нуле полюс первого порядка, имеет вид $f(z) = a + bz^{-1}$, где a, b – некоторые комплексные константы.
4. Доказать, что бета-функция $B(x, y)$ является дифференцируемой функцией на всей области своего определения.

4.

3.

в нуле полюс 1-го пор. $\Rightarrow$

$$f(z) = \frac{C_{-1}}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$

в ∞ аналитично $\Rightarrow$

$$f(z) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^{-n}$$

приравнявая, получаем

$$C_n = 0 \text{ для } n \geq 0, \quad C_n = 0 \text{ для } n \geq 1$$

$$f(z) = C_0 + \frac{C_{-1}}{z}$$

(Г.к. полюс
k-го порядка
 $\Leftrightarrow$ в сл.
разл. только
с $C_{-k} \neq 0$)

(Г.к. ~~линейная~~
представима
рядом Тейл.
при замене
 $z = \frac{1}{\xi}$)

$$4. \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$$\Gamma(x) \neq 0$$

$\Gamma(x)$ зад. в $\mathbb{C}$ кроме $\mathbb{Z}_{\leq 0}$
и дискретно

нз.

Если $f(z)$ аналитична в расширенной
комплексной плоскости, значит

$$\exists \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = C, \quad C - \text{константа}.$$

, если в т. $(0,0)$ $f(z)$ имеет разрыв

$$1-\text{го} \text{ порядка} \Rightarrow f(z) = a_{-1} z^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ по}$$

определению, но

$$\exists \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = C \Rightarrow$$

$$f(z) = a_{-1} z^{-1} + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

$\downarrow$
0

$$\Rightarrow f(z) = a_{-1} z^{-1} + a_0 \quad \text{т.е.}$$

1.2. Лемма. $B(p, q)$ диф-на на $\mathbb{R}^+$ по параметрам.

где

$B(x, y)$ - Бет-функция

по параметрам: $B(p, q)$.

$B(p, q)$ определена и непрерывна при $p > 0, q > 0$.

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

Гамма-функция $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$ диф-на при $p > 0$.

Известно: $B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ для дифференцируемости $B(p, q)$ достаточно доказать диф-ть $\Gamma(p)$, а т.к. $B(p, q)$ симметрична

$\Rightarrow$ достаточно доказать, что $B(p, q)$ диф-на по одному параметру.

Докажем диф-ть $\Gamma(p)$ при $p > 0$.

□ т.к. $e^{-x} x^{p-1} \in C^1(\mathbb{R}^+)$ $\Rightarrow \Gamma'(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} \ln x dx$

докажем, что $\int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} \ln x dx$ р.сх-ся при $p > 0$:

рассмотрим $p \in [p_1, p_2]$, тогда, если $\Gamma'(p)$ р.сх-ся на $[p_1, p_2]$ (где $0 < p_1 < p_2 < +\infty$) $\Rightarrow \Gamma'(p)$ р.сх-ся на $\mathbb{R}^+$.

при $x > 1$: $e^{-x} x^{p-1} \ln x \leq e^{-x} x^{p_2-1} = e^{-\frac{x}{2}} \frac{x^{p_1-1} \ln x}{e^{\frac{x}{2}}} \leq (e^{-\frac{x}{2}}) (1)$

$0 < x < 1$: $|e^{-x} x^{p-1} \ln x| \leq e^{-x} x^{p_2-1} \ln \frac{1}{x} \leq x^{p_1-1} \ln \frac{1}{x} = x^{\frac{p_1}{2}-1} \cdot x^{\frac{p_2}{2}-1} \ln \frac{1}{x} \leq$

$\leq C x^{\frac{p_1}{2}-1} (2) \Rightarrow$ из (1), (2) $\Rightarrow$ р.сх и $p > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Gamma(p)$ диф-на на $\mathbb{R}^+ \Rightarrow B(p, q)$ диф-на на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

№. экз. билета 505

Наименование дисциплины:

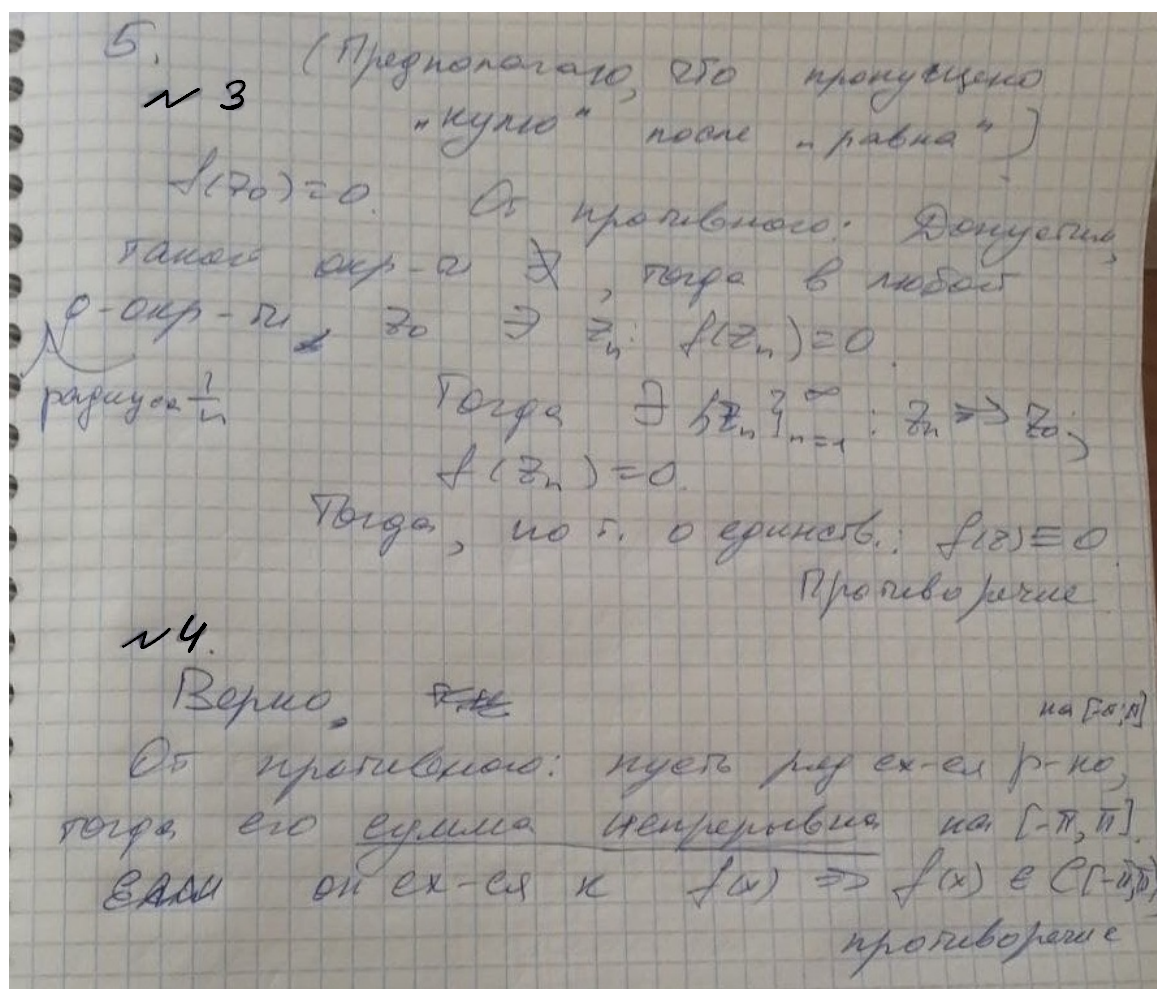
Действительный и комплексный анализ (2 курс, 4 семестр)

1. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Признак Дини равномерной сходимости.

2. Ряды Лорана. Теорема Лорана.

3. Доказать, что если непостоянная функция $w = f(z)$, аналитическая в области G , равна в некоторой внутренней точке $z_0 \in G$, то существует такая проколота окрестность точки z_0 , в которой функция $f(z) \neq 0$.

4. Функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и разрывна на этом отрезке. Верно ли, что тригонометрический ряд Фурье для нее не сходится к $f(x)$ равномерно на $[-\pi, \pi]$? Ответ обосновать.



№3

Пусть есть ф-ция $g(z) = \text{const}$, $f(z), g(z) \in A(U)$
и $\exists \{z_k\}_{k \rightarrow \infty} \rightarrow z_0$, $z_k \in U(z_0) \forall k$

и $f(z_k) = g(z_k)$, тогда по т. единств.

$f(z) \equiv g(z)$, но $g(z) = \text{const}$, а именно

$g(z) = 0$, а $f(z) \neq \text{const} \Rightarrow$

$\exists U(z_0)$, в которой $f(z) \neq 0$

~~Теор. единств.~~

4) Верно.

Из леммы о т. Фейера:

$$b_n(x, f) = \frac{S_0(x, f) + S_1(x, f) + \dots + S_n(x, f)}{n+1}$$

$S_i(x, f)$ - i -ая част. сумма триг. разг. Фурье

Пусть $f \in R[-\bar{x}; \bar{x}]$, непрерыв $f = 2\bar{x}$; в т. x_0
 $\exists f(x_0+0), f(x_0-0)$ тогда

$$b_n(f, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [f(x_0+0) + f(x_0-0)]$$

$\Rightarrow$ Пусть $f(x)$ разрывна в т. $x_0 \in (-\bar{x}; \bar{x})$

и $\exists f(x_0+0); f(x_0-0) \Rightarrow f(x_0+0) \neq f(x_0-0) \Rightarrow$

Тригонометр. разг. Фурье разрывна в
этой точке $\Rightarrow$ мет. разн. сх-ны

✓4

Замечание. Так же как и для теоремы 9 доказывается, что каждое из условий теоремы 12: 1) непрерывности $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ и 2) равенства значений $f(-\pi)$ и $f(\pi)$ является *необходимым* условием для равномерного на отрезке $[-\pi, \pi]$ приближения функции $f(x)$ тригонометрическими многочленами.

Усиленная формулировка первой теоремы Вейерштрасса. Для того чтобы интегрируемую на $[-\pi, \pi]$ функцию $f(x)$ можно было равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$ приблизить тригонометрическими многочленами, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяла условию $f(-\pi) = f(\pi)$.

№. экз. билета 906

Наименование дисциплины:

Действительный и комплексный анализ (2 курс, 4 семестр)

1. Непрерывность и интегрируемость несобственных интегралов, зависящих от параметра, на отрезке.
2. Дробно-линейные функции: инвариантность двойного отношения, круговое свойство.
3. Доказать, что точка $z_0 = 0$ является существенно особой точкой для функции $f(z) = \exp(z^{-1}) / (1 - z)$.
4. Пусть $f(x) = \sin^2 x$ при $x \in [0, \pi]$ и $f(x) = x(x + \pi)$ при $x \in [-\pi, 0)$. Верно ли, что тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к ней равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$? Ответ обосновать.

(3.) $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \quad z_n = \frac{1}{n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{1 - \frac{1}{n}} = \infty$

$\{\tilde{z}_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \tilde{z}_n = -\frac{1}{n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{z}_n = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{z}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-n}}{1 + \frac{1}{n}} = 0$

Значит предела в точке не существует $\Rightarrow$
 $\Rightarrow z_0 = 0$ - сущ. особая точка

(4)

$$f(x) = \sin^2 x$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 x, & x \in [0, \pi] \\ x(x+\pi), & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

$$f(-\pi) = f(\pi) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x+0) = f(x-0) = 0$$

$$\text{Значит } f(x) \in C[-\pi, \pi]$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 \sin x \cos x, & x \in [0, \pi] \\ 2x + \pi, & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

кусочно-непрерывная

Значит ТРФ ϵx -сд равномерно $\frac{K f(x)}{n}$ по теореме.

(формулировка:

Пусть $f(x) \in C[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$

$f(x)$ имеет кусочно-непрерывную производную
Тогда ТРФ для $f(x)$ ϵx -сд $\frac{K f(x)}{n}$ равномерно на $[-\pi, \pi]$

$$\sqrt{3} \mid z_0 = 0; f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z} = e^{\frac{1}{z}} (1+z+z^2+\dots) = (1+\frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots)(1+z+z^2+\dots) = (1+\frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots) + (1+\frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots) \cdot (z+z^2+\dots) =$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z} = \lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{1}{z}}$$

Поскольку $\tilde{z}_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$; $\tilde{z}_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$: $e^{\frac{1}{\tilde{z}_n}} \rightarrow +\infty$ как $n \rightarrow +\infty$

Поскольку $\tilde{\tilde{z}}_n = -\frac{1}{n} \rightarrow 0$; $\tilde{\tilde{z}}_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$: $e^{\frac{1}{\tilde{\tilde{z}}_n}} \rightarrow 0$ как $n \rightarrow +\infty$

П.о., различные пределы в 0 не совпадают $\Rightarrow \nexists \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$
 $\Rightarrow z=0$ - с.о.п. для $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ по определению.

№. экз. билета 507

Наименование дисциплины:

Действительный и комплексный анализ (2 курс, 4 семестр)

1. Дифференцируемость несобственных интегралов, зависящих от параметра.
2. Формула среднего значения для аналитических функций и ее следствия.
3. Пусть система $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n, \dots$ замкнута в евклидовом пространстве E . Останется ли она замкнутой, если первые два элемента этой системы заменить на элементы $e_1 + e_2, e_1 - e_2$? Ответ обосновать.
4. Пусть z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$ и полюс функции $g(z)$. Какая особенность в точке z_0 у функции $f(z)g(z)$? Ответ обосновать.

3. $e_1, \dots, e_n$ — замкнутая, т.е. $\forall f \forall \varepsilon > 0$

$\exists c_1, \dots, c_n$:

$$\|c_1 e_1 + c_2 e_2 + \sum_{k=3}^n c_k e_k - f\| < \varepsilon$$
$$\| \frac{c_1 + c_2}{2} (e_1 + e_2) + \frac{c_1 - c_2}{2} (e_1 - e_2) + \sum_{k=3}^n c_k e_k - f \| < \varepsilon$$

т.е. $\forall f \forall \varepsilon > 0$

$\exists \tilde{c}_1 = \frac{c_1 + c_2}{2}, \tilde{c}_2 = \frac{c_1 - c_2}{2}, \tilde{c}_k = c_k, k=3, \dots, n$

т.е. вын-но:

$$\|\tilde{c}_1 e_1 + \tilde{c}_2 e_2 + \sum_{k=3}^n \tilde{c}_k e_k - f\| < \varepsilon, \text{ т.е.}$$

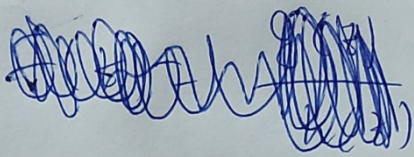
система замкнута.

④ z_0 - y.o.r. $f(z)$

z_0 - полюс

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$g(z) = \sum_{n=1}^p b_{-n} (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$



при переносе получим:

$$a_p b_{-p} (z - z_0)^{-p} + a_{p-1} b_{-(p-1)} (z - z_0)^{-(p-1)} + \dots$$

Т.е. в разложении в ряд Лорана

главная часть содержит конечное

k -во членов, при этом она главная
часть прицубует.

Значит в этой точке полюс

7

3. $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n, \dots$

↓

 $e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_3, \dots, e_n, \dots$ Запикутость: $\forall f, \forall \varepsilon > 0 \exists c_1, \dots, c_n$

$$\| \sum_{n=1}^N c_n e_n - f \| < \varepsilon$$

||

$$\rightarrow c_1 e_1 + c_2 e_2 + \sum_{n=3}^N c_n e_n - f =$$

$$= \cancel{c_1 e_1 + c_2 e_2} + \frac{c_1 + c_2}{2} (e_1 + e_2) + \frac{c_1 - c_2}{2} (e_1 - e_2) + \sum_{n=3}^N c_n e_n - f$$

Т.е. $\forall f \forall \varepsilon > 0$ берем те же коэф.,
только $c_1' = \frac{c_1 + c_2}{2}, c_2' = \frac{c_1 - c_2}{2}$

Пер-во будет выполн. $\Rightarrow$ записи есть

н.б.
из уел: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, g(z) = \frac{1}{(z - z_0)^3} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$

При перемножении получаем ряд
с конечным числом членов с отриц.
степен.

$\Rightarrow$ не с.о.т.

Может быть устр.: $f(z) = \frac{(z - z_0)^3}{\sin(z - z_0)}, g(z) = \frac{1}{z - z_0}$

и т.д. полюс: $f(z) = \frac{\sin(z - z_0)}{z - z_0}, g(z) = \frac{1}{z - z_0}$

3. По определению $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ - замкнута $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \forall f \in E \exists n, c_1, \dots, c_n:$$

$$\left\| f - \sum_{i=1}^n c_i e_i \right\| < \varepsilon$$

$\Downarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \forall f \in E \exists n, c_1, \dots, c_n:$$

$$\left\| f - \left(\sum_{i=3}^n c_i e_i + c_1 \frac{d_1 + d_2}{2} + c_2 \frac{d_1 - d_2}{2} \right) \right\| < \varepsilon$$

$\Downarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \forall f \in E \exists n, b_1 = \frac{c_1 + c_2}{2}, b_2 = \frac{c_1 - c_2}{2}$$

$$b_i = c_i :$$

$$\left\| f - \left(\sum_{i=3}^n b_i e_i + b_1 d_1 + b_2 d_2 \right) \right\| < \varepsilon$$

$\Downarrow$

то снр. $\{d_1, d_2, e_3, \dots, e_n, \dots\}$ -
замкнута

Ответ: гг

$$d_1 = e_1 + e_2$$

$$d_2 = e_1 - e_2$$

$$e_1 = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

$$e_2 = \frac{d_1 - d_2}{2}$$

4. z_0 - YOT $f \Rightarrow$ в некоторой окрестности

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

z_0 - полюс $g \Rightarrow$ в некоторой окр.

$$g(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^p}$$

примем φ аналитич. в этой окрестности.
 $\varphi(z_0) \neq 0$

Тогда $f(z)g(z) = \frac{\varphi(z)f(z)}{(z - z_0)^p} \Rightarrow$

в ряде Лорана членов (возможно, нулевое) число ~~отрицательных~~ отрицательных степеней $\Rightarrow$

z_0 не COT где $f(z) \cdot g(z)$

$] f = z, \text{ везде, кроме } 0$
 $g = \frac{1}{z}, \text{ везде, кроме } 0$

Тогда $f(z) \cdot g(z) = 1$
 при $z \neq 0$ -

0 - YOT

$] f = 1, \text{ везде, кроме } 0$
 $g = \frac{1}{z}, \text{ везде, кроме } 0$

Тогда $f(z)g(z) = g(z)$
 $z \neq 0 \rightarrow$

0 - полюс:

Ответ: YOT, полюс

№. экз. билета 508

Наименование дисциплины:

Действительный и комплексный анализ (2 курс, 4 семестр)

1. Интегрируемость несобственных интегралов, зависящих от параметра, на полупрямой.
2. Сохранение симметрии. Примеры типовых дробно-линейных отображений.
3. Показать, что интеграл $I(\alpha) = \int_1^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x+1} dx$ сходится неравномерно на интервале $(0,1)$, однако задает на этом интервале непрерывную функцию переменной α .
4. Пусть z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$ и существенно особая точка функции $g(z)$. Какая особенность в точке z_0 у функции $f(z)g(z)$? Ответ обосновать.

$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Res}_{\alpha_k} f(z) = -\operatorname{Res}_{\infty} f(z) = 0 = -C_1 \Rightarrow I = 0.$

№3 $I(\alpha) = \int_1^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x+1} dx$

1) $\exists \varepsilon = \frac{1}{4\pi} : \forall A \geq 1 \exists R_1, R_2 \geq A, \exists \alpha \in (0, 1):$

$$\left| \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sin \alpha x}{x+1} dx \right| \geq \frac{1}{R_2+1} \cdot \left| \int_{R_1}^{R_2} \sin \alpha x dx \right| \geq \left\{ \begin{array}{l} \text{т.к. } R_2 \geq 1, \text{ то } 2R_2 \geq R_2+1 \end{array} \right\}$$

$$\geq \frac{1}{2R_2} \left| -\frac{\cos \alpha x}{\alpha} \right|_{R_1}^{R_2} = \frac{1}{2R_2 \alpha} |\cos R_2 \alpha - \cos R_1 \alpha| = \left\{ \begin{array}{l} R_1 = \frac{\pi n}{2}, \\ R_2 = 2\pi n, \alpha = \frac{1}{n} \end{array} \right\} = \frac{1}{2 \cdot 2\pi n \cdot \frac{1}{n}} \cdot |\cos 2\pi - \cos \frac{\pi}{2}| = \frac{1}{4\pi} = \varepsilon \Rightarrow$$

итог - $I(\alpha)$ не св-ся равн. на $(0, 1)$ по кр. Коши.

2) Пусть $\alpha_0 \in (0, 1), \exists \alpha_1, \alpha_2 : 0 < \alpha_1 < \alpha_0 < \alpha_2 < 1:$

$$\left| \int_1^t \sin \alpha x dx \right| \leq \left| -\frac{\cos \alpha x}{\alpha} \right|_1^t = \left| \frac{\cos \alpha - \cos \alpha t}{\alpha} \right| \leq \frac{2}{\alpha_1}, \forall \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$$

$$\frac{1}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0; \frac{1}{x+1} \text{ монот. по } x \forall \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2] \Rightarrow$$

$I(\alpha)$ св-ся равн. на $[\alpha_1, \alpha_2]$ по пр. Дирихле-Абеля.

$\Rightarrow I(\alpha)$ непр. на $[\alpha_1, \alpha_2]$ ($\frac{\sin \alpha x}{x+1}$ непр. в $[1, +\infty) \times [\alpha_1, \alpha_2]$).

$\Rightarrow$ непр. в α_0 . Т.к. α_0 - произв. т. из $(0, 1)$, то $I(\alpha)$ непр. в $(0, 1)$.

6. (10/8)
 N3

$\alpha \in (0, 1)$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x+1} dx = \left| \begin{array}{l} \downarrow = dx \\ x = \frac{1}{t} \\ t \in \mathbb{R}^+, +\infty \end{array} \right| =$$

$$= \int_{+\infty}^1 \frac{\sin \frac{1}{t}}{\frac{1}{t}+1} \frac{1}{t^2} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{t}}{t+1} dt$$

$\forall A > 0$:

$$\int_A^{+\infty} \frac{\sin x}{x+1} dx = \int_{A\alpha}^{+\infty} \frac{\sin t}{t+1} dt$$

~~$\int_A^{+\infty} \frac{\sin x}{x+1} dx$~~

$\alpha \rightarrow 0+0$

$$= \int_A^{+\infty} \frac{\sin x}{x+1} dx \Rightarrow \int_{A\alpha}^{+\infty} \frac{\sin t}{t+1} dt \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

(limit 1)
 Divergence

$\Rightarrow \forall A > 0 \exists \alpha \in (0, 1) \exists \epsilon = \frac{\pi}{2}$

$$\left| \int_A^{+\infty} \frac{\sin x}{x+1} dx \right| \geq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{no limit of the value}$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x+1} dx \text{ no limit in } \alpha \in (0, 1)$$

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$
 $\{ \alpha_1 < \alpha_2 \}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x+1} dx \text{ no limit of the value}$$

$\Rightarrow$ the map of α is not continuous in $(0, 1)$
 $\Rightarrow$ the map is not continuous in $(0, 1)$

N4

70-year old $f(z)$, (or) $g(z)$

Old $f(z)g(z)$ & z_0 ?

70-year old $f(z) \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$

70-year old $g(z) \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$

$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$

$$g(z) = \frac{h(z)}{f(z)}$$

Then z_0 is a 70-year old $h(z) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z)}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \Rightarrow \text{yes}$$

Then z_0 is a pole $f(z) \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} h(z) = \infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z)}{f(z)} = \infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow z_0$ is a pole of $g(z) \Rightarrow \text{yes}$

A.O., z_0 is a pole of $h(z)$

№ 3

$$I(\alpha) = \int_1^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x+1} dx \quad \text{сх-ср } \forall \alpha > 0$$

доискр. ↓

по упр. Диф. Аб.

Р. Неравномерное:

$$\forall R_1, R_2 \nexists \varepsilon > 0, \forall A > 0 \exists R_1, R_2 \geq A, \exists \alpha:$$

$$\left| \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sin \alpha x}{x+1} dx \right| = \int_{\alpha R_1}^{\alpha R_2} \frac{\sin t}{t+\alpha} dt \leq$$

$$\stackrel{\text{выберем}}{=} \left\{ \begin{array}{l} R_1 = A, \alpha = \frac{\pi}{4A} \\ R_2 = 2A \end{array} \right\} = \left| \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin t}{t+\pi/4} dt \right| \geq$$

$$\geq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin t}{t+2} dt \geq \varepsilon$$

т.к. $\sin t > 0$ на $[\pi/4, \pi/2]$

Керн-Р:

$$\forall \alpha_0 > 0, \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_2: 0 < \alpha_1 < \alpha_0 < \alpha_2 < \infty$$

На $[\alpha_1, \alpha_2]$ $I(\alpha)$ сх-ср р-но по Диф.

$$\text{т.е. } \left| \int_{R_1}^{R_2} \sin \alpha x dx \right| \leq \frac{2}{\alpha} \leq \frac{2}{\alpha_1}, \quad \frac{1}{x+1} \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$ керн. на $[\alpha_1, \alpha_2] \Rightarrow$ керн. в 0

§ 4

$$\exists \lim_{x \rightarrow z_0} f(x) = A \neq \infty$$

$$\text{По т. Скоры: } \exists \{z'_n\}: \lim_{n \rightarrow \infty} z'_n = z_0, \lim_{n \rightarrow \infty} f(z'_n) = 0$$

$$\text{и } \exists \{z''_n\}: z''_n \rightarrow z_0 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} f(z''_n) = \infty$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} f(z'_n) \cdot f(z'_n) = A \cdot 0 = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(z''_n) \cdot f(z''_n) = A \cdot \infty = \infty \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ глос $f \cdot f$ z_0 -с.о.т

№. экз. билета 509

Наименование дисциплины:

Действительный и комплексный анализ (2 курс, 4 семестр)

1. Интеграл Дирихле: вычисление и основные свойства.

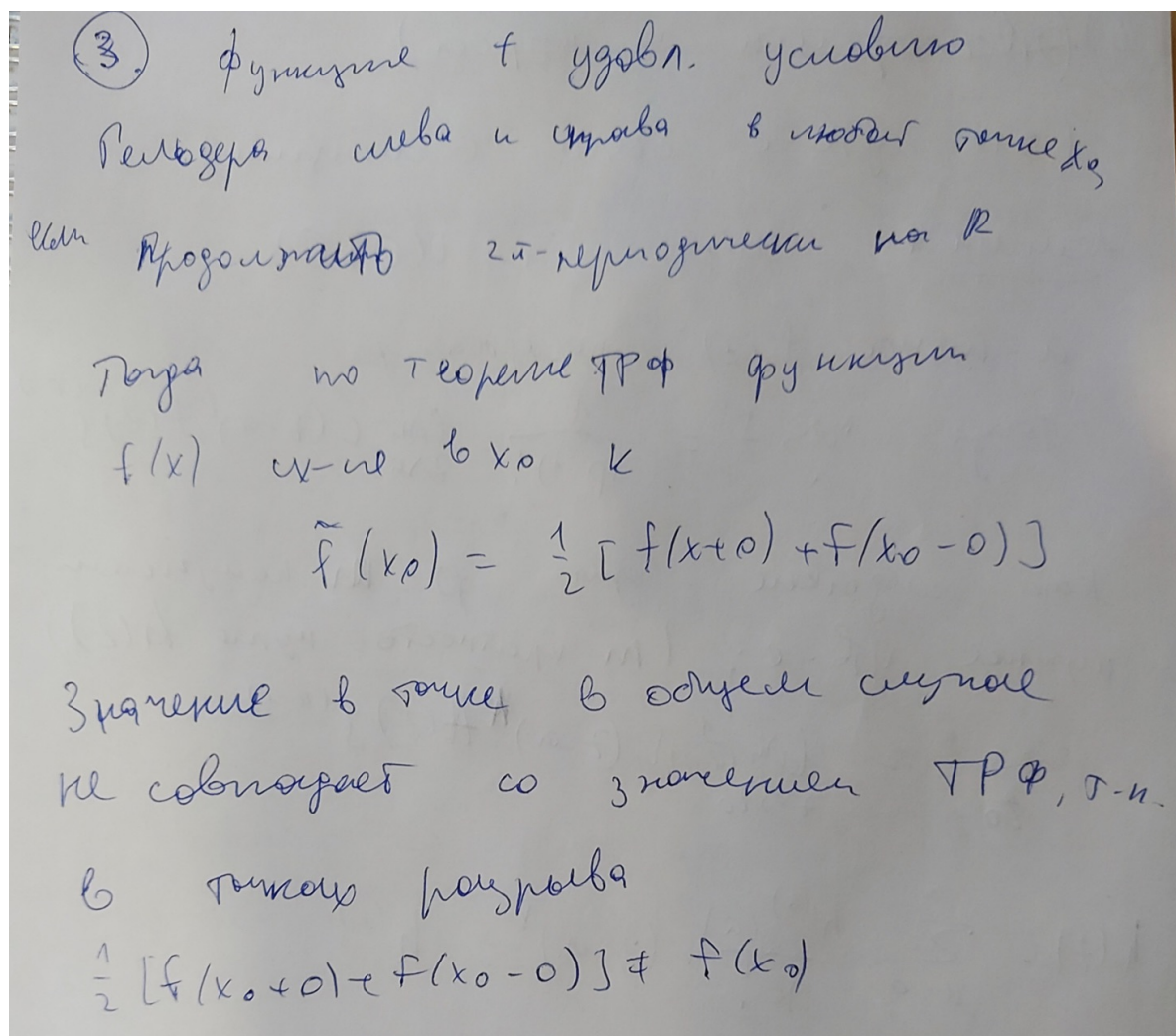
2. Интегральная формула Коши.

3. Доказать, что тригонометрический ряд Фурье любой кусочно-постоянной функции сходится в каждой точке отрезка $[-\pi, \pi]$.

Совпадает ли сумма такого ряда с разлагаемой функцией? Ответ обосновать.

4. Пусть $f(z) = g(z)/h(z)$, где функции g, h аналитичны в окрестности точки z_0 , причем $g(z_0) \neq 0, h(z_0) = 0, h'(z_0) \neq 0$.

Доказать, что вычет $f(z)$ в точке z_0 равен $g(z_0)/h'(z_0)$.



4) ~~⇒~~

Лемма Пусть z_0 — узел,
~~то~~ пусть $f(z)$ — функция p , $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^p}$
 тогда $\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z-z_0)^p f(z) \right]^{(p-1)}$

Роль нам упр. доказана как следствие:

~~Пусть m — порядок нуля z_0 функции~~

Т.к. $h(z_0) \neq 0$, то z_0 — простой корень $h(z)$.

Т.е. $h(z) = (z-z_0) h_1(z)$, $h_1(z_0) \neq 0$

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k = h^{(1)}(z_0)(z-z_0) +$$

$$+ \frac{h^{(2)}(z_0)}{2!} (z-z_0)^2 + \dots =$$

$$= (z-z_0) \left(h^{(1)}(z_0) + \frac{1}{2!} h^{(2)}(z_0)(z-z_0) + \dots \right)$$

$$h_1(z_0), \quad h_1(z_0) = h^{(1)}(z_0)$$

тогда по упр. леммы при $p=1$:

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z-z_0) \frac{g(z)}{h(z)} \right] =$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z-z_0) \frac{g(z)}{(z-z_0) \cdot h_1(z)} \right] = \frac{g(z_0)}{h_1'(z_0)}$$

л9.3

Сх-ся т.к. f в некоторой точке удовл.
усл-ю Гельдера слева и справа.

Или Если $f = \text{const}$, то сумма
ряда совп. с f (т.к. $S(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0-0) + f(x_0+0))$)

Если $f \neq \text{const}$ и кус-носл.,
то у нас есть разрывы, т.е. $\exists x_1$.

$$f(x_1-0) \neq f(x_1+0) \text{ и } \frac{1}{2}(f(x_1-0) + f(x_1+0)) \neq f(x_1)$$

Тогда сум. ряда в этой точке
не сов. с f (а с. к. сумме пределов.)

л9.4

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{h(z)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n}{(z-z_0) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n} = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0) \psi(z)}$$

$$= \frac{1}{z-z_0} \left(\frac{\varphi(z_0)}{\psi(z_0)} + (z-z_0) \cdot \left(\frac{\varphi(z_0)}{\psi(z_0)} \right)' + \dots \right)$$

$$\Rightarrow \text{res}_{z_0} f = c_{-1} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi(z_0)} = \frac{b_0}{a'_0} = \frac{b_0}{a_1} =$$

$$= \frac{\varphi(z_0)}{h'(z_0)}$$

(или см л9.5 л3)

№ экз. билета 510

Наименование дисциплины:

Действительный и комплексный анализ (2 курс, 4 семестр)

1. Гамма-функция Эйлера: определение, свойства.

2. Аналитическое продолжение с вещественной оси. Элементарные функции комплексного переменного..

3. Доказать, что функция $f(x) = \sqrt{x}$ принадлежит классу Гельдера с показателем $\alpha = 1/2$ на интервале $(0,1)$ и классу Гельдера с показателем $\alpha = 1$ на интервале $(1,2)$.

4. Верно ли, что интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x} dx$ сходится равномерно на любом множестве Y , не содержащем 0? Ответ обосновать.

10. 3 $f(x) = \sqrt{x}$

Д-ш, что $\forall x_1, x_2 \in (0,1), x_1 \leq x_2: f(x_2) - f(x_1) =$
 $= \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} \leq \sqrt{x_2 - x_1} = |x_2 - x_1|^{1/2}$
 $\sqrt{x_2} \geq \sqrt{x_1}$
 $2\sqrt{x_2 x_1} \geq 2x_1$
 $-x_1 \geq x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2}$
 $x_2 - x_1 \geq x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 = (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2$
 $\sqrt{x_2 - x_1} \geq \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}$, з.п.г.

Д-ш, что $\forall x_1, x_2 \in (1,2), x_1 \leq x_2: \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} \leq x_2 - x_1$
 $x_2 \geq x_1 \Rightarrow (\sqrt{x_2} - 1)\sqrt{x_2} \geq (\sqrt{x_1} - 1)\sqrt{x_1}$
 $x_2 - \sqrt{x_2} \geq x_1 - \sqrt{x_1}$
 $x_2 - x_1 \geq \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}$, з.п.г.

4.1 Нет. Возьмем $Y = (0, +\infty)$. На ка-
 нет р-код сн-м: $\exists \varepsilon > 0: \forall A > 0 \exists R_1, R_2 \geq A, \exists y_0 > 0$
 $\left| \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sin xy}{x} dy \right| = \left| \int_{y_0}^{y_0 R_2} \frac{\sin t}{t} dt \right| =$
 $= \int_{y_0 = \frac{\pi}{4A}}^{R_1 = A, R_2 = 2A} \frac{\sin t}{t} dt = \varepsilon$

179

Верно ли, что интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sin xy}{x} dx$ с.р. равномерно на любом множестве Y , не содержащем 0?

Решение:

а) $M = [a, b], 0 < a < b$

б) $M = [0, b]$

а) С.р. равномерно по признаку Дир. - Аб.

$\frac{1}{x}$ монотонно р-но стремится к 0.

$$\left| \int_0^R \sin yx dx \right| = \left| \frac{1}{y} (-\cos yx) \Big|_0^R \right| \leq \frac{2}{y} \leq \frac{2}{a} - \text{р.но ограничена}$$

б) Р-ной с.р.-ти нет, т.к.:

$$\exists \epsilon > 0 : \forall A > 0 : \exists R_1, R_2 > A, \exists y :$$

$$\left| \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sin yx}{x} dx \right| = \left| \int_t = x \right| = \left| \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sin t}{t} dt \right| =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{возьмем } R_1, R_2 > A \text{ и } y > 0 \text{ так, что } yR_1 = \frac{\pi}{2}, yR_2 = \pi$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \epsilon$$

Ответ: не верно.

№. экз. билета 911

Наименование дисциплины:

Действительный и комплексный анализ (2 курс, 4 семестр)

1. Бэта-функция Эйлера: определение, свойства.
2. Интегральная теорема Коши и её обобщения.
3. Доказать, что точка $z = 0$ является существенно особой точкой для функции $w = \left(\exp\left(\frac{1}{z}\right) - 1\right)^{-1}$.
4. Верно ли, что интеграл $\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ сходится равномерно на множестве $(0, a)$ для любого $a > 0$? Ответ обосновать.

3) Р-м: $z=0$ - с.о.т. ф-ции

$$w(z) = \frac{1}{e^{1/z} - 1}$$

Р-во: Разлагая ф-цию $\frac{1}{1-e^{1/z}}$ в
в ряд Маклорена по $e^{1/z}$:

$$\frac{1}{1-e^{1/z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{n/z}, \text{ при этом}$$

$e^{n/z}$ разлагается как: $e^{n/z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{n}{z}\right)^k \cdot \frac{1}{k!}$

$$\text{А.о. } \frac{1}{1-e^{1/z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{n}{z}\right)^k \cdot \frac{1}{k!},$$

заметьте что данная сумма
состоит из бескон. числа слагаемых
вида: $a \cdot z^{-b}$, $a > 0$, $b \geq 0$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

М.о. главная часть ряда Лорана ($z \rightarrow 0$)

ф-ции $w(z)$ содержит бесконечное
число членов $\Rightarrow$ по критерию с.о.т.

$z=0$ - существенно особая
точка.

И.т.д.

$$4) \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x)$$

Рассм. случ. $0 < p_0 \leq \pi \leq p_1 < +\infty$

$\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ - слог. равнам. по

крит. Вейерштрасса, т.к.

$$|e^{-t} t^{x-1}| \leq |t^{p_0-1}|, \quad \int_0^1 t^{p_0-1} dt - \text{слог.}$$

$\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ - слог. равнам. по

крит. Вейерштрасса, т.к.

$$|e^{-t} t^{x-1}| \leq |e^{-t} t^{p_1-1}|, \quad \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{p_1-1} dt$$

т.о. $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ слог. равнам.

при $0 < p_0 \leq \pi \leq p_1 < +\infty$,

в слог. произв. по 30: $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

слог. равнам.

на 12, 01 40 20 / Vmb.

№. экз. билета 512

Наименование дисциплины:

Действительный и комплексный анализ (2 курс, 4 семестр)

1. Бэта и гамма-функции Эйлера: определения, связь между ними.
2. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана.
3. Известно, что аналитическая на всей комплексной плоскости функция $f(z)$, такова, что для некоторой последовательности $z_n \rightarrow 0$ выполнены равенства $f(z_n) = A$ для всех натуральных n . Что можно сказать о такой функции $f(z)$? Ответ обосновать.
4. Верно ли, что интеграл $\int_0^1 t^x dt$ сходится равномерно на любом множестве $(-1, a)$ для любого $a > 0$? Ответ обосновать.

3

Выполнены все условия теоремы единственности (Леонтьева, с. 84) кроме условия $z_i \neq z_j, i \neq j$.

Теорема единственности. Пусть даны функции $f(z), g(z) \in A(D)$, последовательность $\{z_n\} \in D, (z_i \neq z_j, i \neq j)$, такая, что существует предельная точка $z_0 \in D$. Тогда, если $f(z_k) = g(z_k)$ для любого $k \in N$, то $f(z) \equiv g(z), z \in D$.

Тогда о такой функции ничего сказать нельзя. Например функция $f(z) = z$ на последовательности $0, 0, \dots$ равна нулю, но не является тождественно равной нулю.

Если потребовать для последовательности $z_i \neq z_j, i \neq j$, то $f \equiv A$ на всей комплексной плоскости.

4

Равномерная сходимость на (c, d) эквивалентна равномерной сходимости на $[c, d]$.

Доказательство на YouTube (<https://youtu.be/IEWolb-Fy5Y?t=2542>)

1. Критерий Коши равномерной сходимости для интервала
2. Интеграл в критерии Коши непрерывная функция
3. Тогда для отрезка справедливо нестрогое неравенство

Рассмотрим интеграл в точке $x = -1$.

$$\int_0^1 t^{-1} dt = \ln(1) - \ln(0)$$

Интеграл расходится в точке, а значит не сходится равномерно.

№. экз. билета 513

Наименование дисциплины:

Действительный и комплексный анализ (2 курс, 4 семестр)

1. Асимптотическая формула для функции $\Gamma(\lambda+1)$, $\lambda \rightarrow \infty$: схема ее доказательства. Формула Стирлинга.
2. Дифференцирование интеграла по параметру. Бесконечная дифференцируемость аналитических функций.
3. Доказать, что бесконечно удаленная точка комплексной плоскости является существенно особой точкой для функции $w = e^z / (z - 1)$.
4. Верно ли, что интеграл $\int_0^\infty e^{-xy^2} dy$ сходится равномерно на любом множестве $(0, a)$ при $a > 0$? Ответ обосновать.

$\frac{e^z}{z-1}$

$\checkmark 3$

~~$z = 2\pi ki$~~ $z = 2\pi ki \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$

$\frac{e^{2\pi ki}}{2\pi ki - 1} = \frac{1}{2\pi ki - 1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

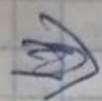
$z = k + 2\pi ki \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$

$\frac{e^{k+2\pi ki}}{k+2\pi ki - 1} = \frac{e^k}{k+2\pi ki - 1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$

$\Rightarrow z = \infty$ сот

13. 8

$$z_n = 2\pi i \cdot n$$



$$\frac{e^{z_n}}{z_n - s} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$z_n = n$$

$$\frac{e^{z_n}}{z_n - s} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

$$\Rightarrow \cos$$

14

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall A \exists R_1, R_2 > A \exists x > 0$$

$$\left| \int_{R_1}^{R_2} e^{-(\sqrt{x}y)^2} dy \right| = \int_{R_1 \sqrt{x}}^{R_2 \sqrt{x}} e^{-t^2} dt =$$

$$= \left| \int_{R_1 \sqrt{x}}^{R_2 \sqrt{x}} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{x}} dt \right| = \left| \int_{R_1}^{R_2} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{x}} dt \right| = \left| \int_{R_1}^{R_2} e^{-t^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dt \right|$$

$$= \left| \int_1^2 e^{-t^2} \cdot A dt \right| \geq$$

$$\geq \int_1^2 e^{-t^2} A dt \geq \int_1^2 e^{-t^2} dt = e$$

№ экз. билета 914

Наименование дисциплины:

Действительный и комплексный анализ (2 курс, 4 семестр)

1. Ортонормированные системы. Задача о наилучшем приближении элемента евклидова пространства.

2. Аналитическое продолжение через границу области и с помощью разложения в степенные ряды.

3. Доказать, что функция $B(p, p)$, где $B(x, y)$ -- бэта-функция Эйлера, непрерывна при $p > 0$. Существует ли предельное значение этой функции при $p \rightarrow 0 + 0$? Ответ обосновать.

4. Функция $f(x) = \sin^2 x$ при $x \in [0, \pi]$ и $f(x) = \cos^2 x$ при $x \in [-\pi, 0)$. Какие из следующих утверждений справедливы:

- тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$

а) сходится к ней равномерно на $[-\pi, \pi]$,

б) сходится к ней равномерно на $[0, \pi]$,

в) сходится к ней равномерно на $[\pi/4, \pi/2]$. Ответ обосновать.

Handwritten solution for problem 4:

$$N4) f'(x) = \begin{cases} 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x, & x \in [0, \pi] \\ 2x + \pi, & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

$f'(x)$ кусочно-непрерывна на $[-\pi, \pi]$, $f(x)$ непр-на на $[-\pi, \pi]$ (т.к. $f(0-0) = f(0+0) = 0$); $f(-\pi) = 0 = f(\pi) \Rightarrow$ по теор. о простейших услов. равн. ся-ти ПРФ: ПРФ $f(x)$ равн. ся-ся на $[-\pi, \pi]$ к $f(x)$.

✓ 3

$$B(p, p) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(p)}{\Gamma(2p)}$$

Т.к. $\Gamma(p)$ - непрерывна $\forall p > 0$,
 $\Gamma(p) \neq 0 \forall p > 0 \Rightarrow B(p, p)$ непрерывна $\forall p > 0$

при этом, из асимптотического для $\Gamma(p)$ при $p \rightarrow 0+0$: $\Gamma(p) \sim \frac{1}{p}$

$$\lim_{p \rightarrow 0+0} \frac{\Gamma(p) \Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{\frac{1}{p^2}}{\frac{1}{2p}} = \frac{2}{p} \rightarrow \infty$$

дифференцируемой функцией на своей области определения.

4) Формула приведения. Пусть $p > 0$. Выразим $\Gamma(p+1)$ через $\Gamma(p)$. Имеем $\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^p dx = -e^{-x} x^p \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx = p\Gamma(p)$ т.е.

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \quad (2)$$

– формула приведения. Фиксируем $\forall n \in \mathbb{N}$, пусть $p > n-1$. Последовательно применяем формулу (2):

$$\Gamma(p+1) = p(p-1) \dots (p-n+1)\Gamma(p-n+1), \quad (3)$$

по этой формуле значения $\Gamma(p)$ для $p > 1$ выражаются через значения $\Gamma(p)$ для $p \in (0, 1)$. Так как $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$, то, полагая $p = n \in \mathbb{N}$ в (3), получим $\Gamma(n+1) = n(n-1) \dots 1 = n!$.

6 / 1

§4. Интегралы Эйлера.

Это дает основание считать $\Gamma(p+1)$ обобщением факториала: полагают $\Gamma(p+1) \equiv p!$, $\forall p > 0$.

5) График Γ -функции. Из $\Gamma''(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} \ln^2 x dx > 0$, следует, что график Γ -функции является выпуклым вниз, $\Gamma'(p)$ может иметь только один нуль. Так как $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ (получаем из (2) при $p = 1$), то по теореме Ролля этот нуль расположен в $(1, 2)$ (в т. $p_0 = 1,46 \dots$, $\min \Gamma = \Gamma(p_0) = 0,8856 \dots$, $\Gamma'(p_0) = 0$).

Вертикальная асимптота в т. $p = 0$: из (2) следует

$$\frac{\Gamma(p)}{1/p} = \Gamma(p+1) \rightarrow 1, p \rightarrow 0+, \Rightarrow \Gamma(p) \sim \frac{1}{p} \rightarrow +\infty, p \rightarrow 0+.$$

Из формулы (2) (а также из полученной выше асимптотической

№. экз. билета 515

Наименование дисциплины:

Действительный и комплексный анализ (2 курс, 4 семестр)

1. Замкнутость и полнота ортонормированных систем: определения и основные свойства.

2. Существенно особая точка. Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса. Теорема Пикара (без доказательства).

3. Доказать, что интеграл $\int_{\alpha}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x+\alpha} dx$ является непрерывной функцией параметра α при всех $\alpha > 0$.

4. Указать все функции $f(z)$, аналитические на всей комплексной плоскости и для которых выполнено соотношение $\operatorname{Re} f(x+iy) = x^3 - 3xy^2$. Ответ обосновать.

926

н3. (1): $\int_{\alpha}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x+\alpha} dx \in C(0; +\infty)$

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x+\alpha} dx = \int_{\alpha=\alpha+t}^{\infty} \frac{\sin \alpha t}{\alpha+t} dt = \int_1^{\infty} \frac{\sin \alpha^2 t}{\alpha(t+1)} dt =$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{\sin \alpha^2 t}{t+1} dt$$

$\forall \alpha_0 > 0 \exists \alpha_1, \alpha_2: 0 < \alpha_1 < \alpha_0 < \alpha_2$

Док-м, что $I(\alpha)$ ск-ся р-но на $[\alpha_1, \alpha_2]$

$\Rightarrow$ непрерывна на $[\alpha_1, \alpha_2] \Rightarrow$ непрерывна $\forall \alpha_0 > 0$.

на $[\alpha_1, \alpha_2]$:

$$\left| \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sin \alpha^2 t}{t+1} dt \right| \leq \frac{1}{\alpha_1^2} \left| \int_{R_1}^{R_2} \sin \alpha^2 t dt \right| \leq \frac{2}{\alpha_1^2} < \frac{2}{\alpha_1^2}$$

$\Rightarrow$ $\uparrow$ р-но сгр.

$\frac{1}{t+1}$ р-но ск-ся сгр. к 0, монот.

След-но, $I(\alpha)$ ск-ся р-но на $[\alpha_1, \alpha_2]$ по пр. Диф-АБ. $\Rightarrow$ з.п.д.

815 №4

$$\operatorname{Re} f(x+iy) = x^3 - 3xy^2$$

Найти функцию единственно, с.к.
во всех точках f и f' и f'' и f'''

$$f(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + i v(x, y)$$

УКР. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$
 $3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad 3x - 6xy = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Отсюда, $v = (3x^2 - 3y^2)y + \varphi(x) = 3xy^2 + \varphi(x)$
 $+ \psi(y) \Rightarrow \psi(y) = -y^3, \quad \varphi(x) = c$

$$f(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3 + c)$$

4. $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$

Пусть $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$

Потому $\operatorname{Re} f(z) = u, \operatorname{Im} f(z) = v \quad u = x^3 - 3xy^2$

Аналитичность на всей комплексной п-ти эквивалентно дифференцируемости на ней же. Значит, по теореме о дифф-ти $u(x, y)$ и $v(x, y)$ должны быть диф-ны и на них должны выполняться условия Коши-Гoursa на $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^3 - 3xy^2) = 3x^2 - 3y^2 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (x^3 - 3xy^2) = -3x^2 + 6xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = \int (3x^2 - 3y^2) dy = 3x^2y - y^3 + C \\ v = \int (6xy - 3x^2) dx = 3x^2y - y^3 + \tilde{C} = 3x^2y - y^3 + C \end{cases}$$

значит, $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3 + C)$ $C \in \mathbb{R}$

№. экз. билета 516

Наименование дисциплины:

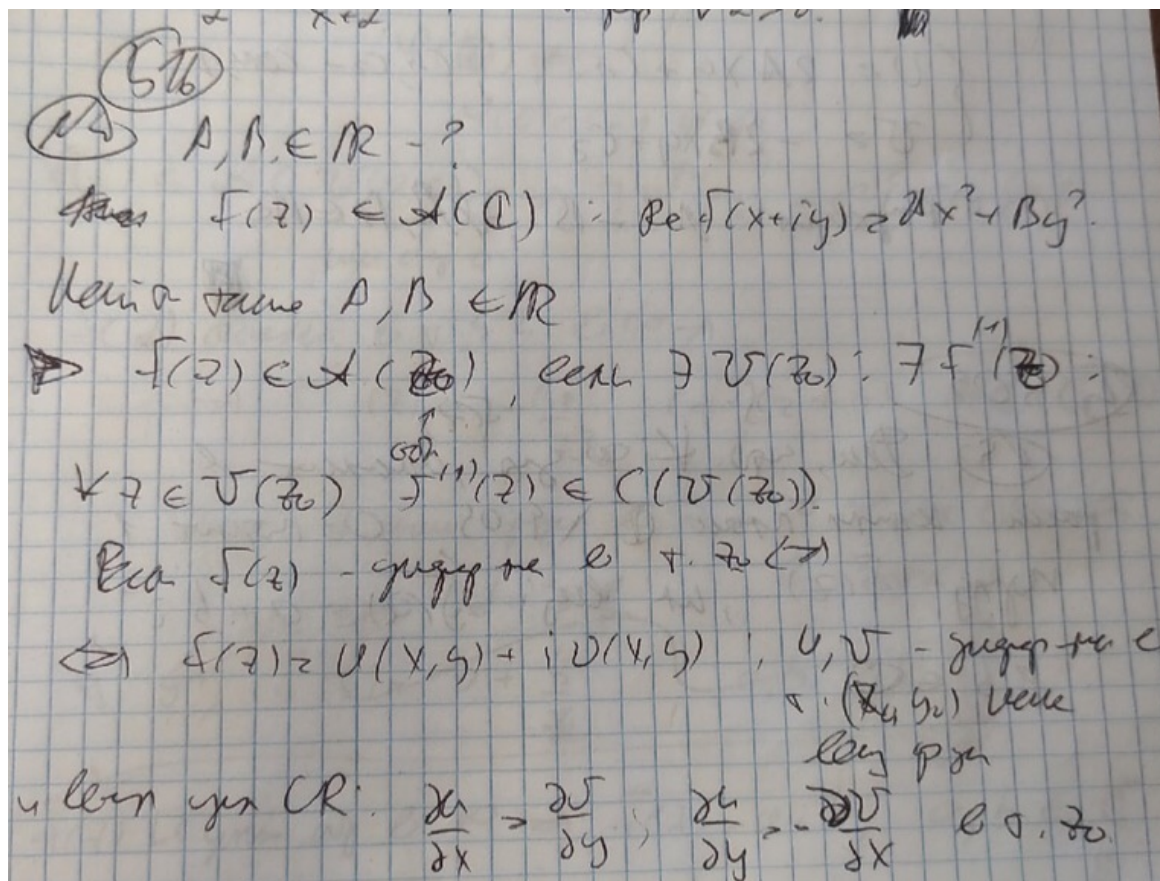
Действительный и комплексный анализ (2 курс, 4 семестр)

1. Тригонометрические ряды Фурье: теорема Фейера о равномерной сходимости.

2. Показательная функция и тригонометрические функции. Свойства конформных отображений, осуществляемых этими функциями.

3. Доказать, что интеграл $\int_{\alpha}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x+\alpha} dx$ является непрерывной функцией параметра α при всех $\alpha > 0$.

4. При каких $A, B \in \mathbb{R}$ существуют аналитические на всей комплексной плоскости функции $f(z)$, для которых выполнено соотношение $\operatorname{Re} f(x+iy) = Ax^2 + By^2$? Ответ обосновать.



$$f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$$

$$\operatorname{Re} f(x+iy) = u(x,y)$$

$$\text{Пусть } u \rightarrow A x^2 + B y^2, \text{ тогда } v,$$

$$f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \quad \text{т.е. для } \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2Ax = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2By = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2Ax = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2By = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 2Axy + C_1 \\ v = -2Bxy + C_2 \end{cases}, C_1, C_2 - \text{const}$$

$$v = -2Bxy + C_2$$

$$\text{Получаем } A = -B, \forall A, B \in \mathbb{R}$$

(N4) При каких $A, B \in \mathbb{R}$ существуют аналит. на $\mathbb{C}$ для которых: $\operatorname{Re} f(x+iy) = Ax^2 + By^2$?

$$\text{Решение: } f(z) = u(x,y) + i v(x,y), \quad f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}), \quad u(x,y) = Ax^2 + By^2$$

Тогда введем упр. Коши-Риссана:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}; \quad \begin{cases} u'_x = 2Ax \\ u'_y = 2By \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v'_y = 2Ax \\ v'_x = -2By \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 2Axy + C_1(x) \\ v = -2Bxy + C_2(y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A = -2B \\ C_1(x) = C_2(y) = C \end{cases}$$

$$C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow A = -B$$

Ответ: при $A = -B$

№. экз. билета 517

Наименование дисциплины:

Действительный и комплексный анализ (2 курс, 4 семестр)

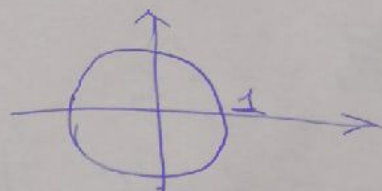
1. Замкнутость тригонометрической системы. Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции.
2. Классификация изолированных особых точек аналитических функций. Устранимая особая точка. Полус. Полус.
3. Верно ли, что несобственный интеграл от дифференцируемой функции $f(x, y)$ по переменной x является непрерывной функцией переменной y ? Ответ обосновать.
4. Пусть $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Найти все аналитические в U функции $f(z)$ такие, что $|f(z)| = 1$ для всех $z \in U$. Ответ обосновать.

№ 3
Нет, не верно. В качестве контрпримера рассмотрим интеграл Дирихле: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} y = I(y)$
Как можно заметить подынтегральная ф-ция является непрерывной по x , однако $I(y)$ есть разрывная ф-ция.

Вспомогательная контурированная рассуждения
 интеграл Дирихле: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} y = I(y)$
 как можно заметить подинтегральная ф-ция является
 ф-цией по x , однако $I(y)$ есть разрывная ф-ция.

1-0-9

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$



Все анал. ф-ции, такие что $|f(z)| = 1$

Для анал. ф-ции справедливы условия Коши-Рисса:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

где $f(x,y) = u(x,y) + i v(x,y)$
 $z = x + iy$

Также из условий следует, что

$$\sqrt{u^2 + v^2} = 1 \Rightarrow u^2 + v^2 = 1$$

Проверим производные по x и по y

$$2u u'_x + 2v v'_x = 0$$

$$2u u'_y + 2v v'_y = 0$$

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

СЛАУ имеет тривиальное решение $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ v_x & u_y \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow u_x \cdot u_y - v_x \cdot v_y = 0 \Rightarrow \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow u_x = \frac{u}{y} = 0 \text{ и при этом } u \text{ и } v_y^2 + v_x^2 = 0 \rightarrow$$

$$\Rightarrow v_y = v_x = 0$$

Из этих равенств заключаем, что $v(x, y) = C_1$
 $u(x, y) = C_2$

А значит $f(x, y) = C_2 + iC_1, \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 1$

↗
 Ответ

У3

Верно ли, что несобственный
интеграл от дифф-ой ф-ции $f(x, y)$
по переменной x является
непрерывной ф-цией переменной y .

Ответ:

нет, не верно
интеграл не ес-ва
равномерно.

Пример:

$$f(x, y) = \frac{\text{sign } y}{\sqrt{x}}$$

диф-ма по x на $[0, 1]$

$$\int_0^1 \frac{\text{sign } y}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow +0} \int_a^1 \frac{\text{sign } y}{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \text{sign } y \cdot \lim_{a \rightarrow +0} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= 2 \text{sign } y \cdot \left[\frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}} \right]_a^1 = (2\sqrt{x} - 2\sqrt{a}) = 2 - 2\sqrt{a} \xrightarrow{a \rightarrow 0} 2$$

разрывная.

то есть условие задачи выполнено
не всегда.

54

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

Найти все аналитические в U
 φ -ции $f(z) : |f'(z)| = 1 \quad \forall z \in U$.

Решение

$$|f'(z)| = 1$$

$$f'(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

$$f'(z) = g(x, y) (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\text{где } g(x, y) = 1$$

$$f'(z) = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Условие Коши - Римана:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\rho \frac{\partial v}{\partial \varphi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho \cos \varphi = \frac{1}{\rho} \cos \varphi \\ \rho (-\sin \varphi) = -\rho \sin \varphi \end{cases}$$

Выполнено

$$|z| < 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} < 1$$

$$0 \leq x^2 + y^2 < 1$$

№. экз. билета 518

Наименование дисциплины:

Действительный и комплексный анализ (2 курс, 4 семестр)

1. Замкнутость тригонометрической системы. Следствия замкнутости.
2. Теорема Лиувилля. Основная теорема алгебры.
3. Доказать, что гамма-функция Эйлера имеет единственный положительный минимум на положительной вещественной полуоси.
4. Пусть z_0 - полюс функции $f(z)$. Какая особенность в точке z_0 у функции $g(z) = \exp f(z)$? Ответ обосновать.

~3

График $\Gamma(x)$: $\Gamma(1) = 1, \Gamma(2) = 1! = 1$

$$\Gamma''(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^2 dt > 0 \Rightarrow \Gamma'(x) \text{ монотонно возрастает} \Rightarrow$$

у $\Gamma(x)$ есть единственная точка минимума, которая находится между 1 и 2.

~4

полюс $\leftarrow$ const $\rightarrow$

□ $f(z) = \frac{a_{-k}}{z^k} + \frac{a_{-k+1}}{z^{k-1}} + \dots = \frac{a_{-k}}{z^k} (1 + O(z)) \Leftrightarrow$

$a_{-k} = A e^{i\alpha}, A = |a_{-k}|$

$z = \rho e^{i\theta}, \rho \rightarrow 0 \neq 0, \theta - \text{фикс.}$

$\Leftrightarrow \frac{A}{\rho^k} e^{i(k\alpha - k\theta)} (1 + O(\rho))$

$|e^{f(z)}| = e^{\operatorname{Re} f(z)}$

1.сл. $\theta = \frac{\alpha}{k}$

$\operatorname{Re} f(z) = \frac{A}{\rho^k} \operatorname{Re}(1 + O(\rho)) > \frac{1}{2} \frac{A}{\rho^k}$

$|e^{f(z)}| > e^{\frac{A}{2\rho^k}} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} +\infty$

2.сл. $\alpha - k\theta = \pi \Rightarrow \theta = \frac{\alpha - \pi}{k} \Rightarrow \operatorname{Re} f(z) = \frac{-A}{\rho^k} \operatorname{Re}(1 + O(\rho)) < -\frac{A}{2\rho^k}$

$\Rightarrow |e^{f(z)}| < e^{-\frac{A}{2\rho^k}} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \text{сущ. ос. т.}$

полюс $\leftarrow$ const $\rightarrow$

4

Покажем, что $e^{f(z)}$ будет иметь существенно особую точку.

Запишем ряд Лорана для функции имеющей полюс порядка k

$$f = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} (1 + O(z))$$

Коэффициент a_{-k} и аргумент z представим в показательной форме

$$a_{-k} = |a_{-k}| e^{i\alpha}$$

$$z = z_0 + \rho e^{i\theta}$$

Тогда

$$f = \frac{|a_{-k}| e^{i\alpha}}{\rho^k e^{i\theta k}} (1 + O(\rho)) = \frac{|a_{-k}|}{\rho^k} e^{i(\alpha - \theta k)} (1 + O(\rho))$$

и

$$|e^{f(z)}| = e^{\operatorname{Re} f(z)} = e^{\frac{|a_{-k}|}{\rho^k} \operatorname{Re}(e^{i(\alpha - \theta k)} + O(\rho))}$$

Покажем, что функция не имеет предела. Для этого выберем несколько направлений. Например

$$\alpha - k\theta = 0, \rho \rightarrow 0, \lim f = e^{\frac{|a_{-k}|}{\rho^k} \operatorname{Re}(1 + O(\rho))} = +\infty$$

$$\alpha - k\theta = \pi, \rho \rightarrow 0, \lim f = e^{\frac{|a_{-k}|}{\rho^k} \operatorname{Re}(-1 + O(\rho))} = 0$$

Тогда предела не существует, а значит z_0 это СОТ.

№. экз. билета 519

Наименование дисциплины:

Действительный и комплексный анализ (2 курс, 4 семестр)

1. Тригонометрические ряды Фурье: локальная теорема Фейера.

2. Аналитичность суммы степенного ряда. Теорема Тейлора.

3. Функция $w = f(z)$, аналитичная вне круга $|z| \leq 1$, такова, что $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)z = 1$. Чему может быть равен интеграл

$\oint_{|z|=2} f(z) dz$? Ответ обосновать.

4. Функция $f(x)$ определена при всех значениях x равенством

$f(x) = \int_1^\infty \sqrt[3]{|x|} e^{-|x|y^2} dy$. Доказать, что $f(x)$ разрывна в точке $x_0 = 0$.

✓3

$w = f(z)$ аналитична вне круга $|z| \leq 1$
 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)z = 1$

$\oint_{|z|=2} f(z) dz = ?$

Т.к. $f(z)$ аналитична вне круга $|z| \leq 1$, то особая точка
вне контура $|z|=2$ нет.

$$\Rightarrow \oint_{|z|=2} f(z) dz = -2\pi i \operatorname{res}_{\infty} f(z) = 2\pi i$$

$$\operatorname{res}_{\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(z) - f(\infty)) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(z) - 1) = \lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) - \lim_{z \rightarrow \infty} z = 1 - \infty = -\infty$$

$$f(z)z = z \left(a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots \right) = a_0 z + a_{-1} + \frac{a_{-2}}{z} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 1 \text{ (по усл.)}$$

$$\Rightarrow a_0 = 0, a_{-1} = 1$$

$$\operatorname{res}_{\infty} f(z) = -a_{-1} = -1$$

N 19.3

$w = f(z)$
аналитическая функция
 $|z| \leq 1$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)z = 1$$

$$\oint f(z) dz = ?$$

$$|z| = 2$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$

$$f(z)z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^{n+1}$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)z = 1 \Rightarrow \begin{cases} c_n = 0, & n \geq 0 \\ c_n \text{ не имеет значения,} \\ \text{так как стремятся к } \infty, & n \leq -2 \end{cases}$$

$$c_{-1} = 1$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n$$

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma} \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n dz = \oint_{\gamma} \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{c_{-n}}_{\text{аналитическая функция}} z^{-n} dz =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[c_{-n} \oint_{\gamma} z^{-n} dz \right] = \oint_{\gamma} z^{-n} dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases} =$$

$$= 2\pi i \cdot c_{-1} = 2\pi i$$

Ответ: $2\pi i$

19.4

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt[3]{|x|} e^{-|x|y^2} dy$$

Док-во разрыв в $x_0 = 0$

$$f(0) = 0$$

$$f(x) = |x|^{\frac{1}{3}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|y^2} dy =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Замена} \\ t = \sqrt{|x|} y \\ t^2 = |x| y^2 \\ 1 \rightarrow \sqrt{|x|} \\ \infty \rightarrow \infty \end{array} \quad \begin{array}{l} y = \frac{t}{\sqrt{|x|}} \\ dy = \frac{dt}{\sqrt{|x|}} \end{array} \right\} =$$

$$= |x|^{-\frac{1}{6}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

Потому интеграл Гаусса

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x|^{-\frac{1}{6}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \cdot \lim_{x \rightarrow 0} |x|^{-\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lim_{x \rightarrow 0} |x|^{-\frac{1}{6}} =$$

Теперь можно
интеграл Гаусса

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$f(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

Разрыв в точке $x_0 = 0$

4.8.9.

№. экз. билета 520

Наименование дисциплины:

Действительный и комплексный анализ (2 курс, 4 семестр)

1. Простейшие условия равномерной сходимости и почленной дифференцируемости тригонометрических рядов Фурье.
2. Теорема единственности аналитической функции и её следствия.
3. Функция $w = f(z)$, аналитичная вне круга $|z| \leq 1$, такова, что $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)z^2 = 1$. Чему может быть равен интеграл $\oint_{|z|=2} f(z)dz$? Ответ обосновать.
4. Верно ли, что интеграл $\int_1^{\infty} \frac{\cos xy}{y} dy$ является равномерно сходящимся на любом интервале, не содержащем точку 0? Ответ обосновать.

№3 $w = f(z) \in A(\mathbb{C} \setminus \{z: |z| \leq 1\})$.

$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)z^2 = 1 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=-2}^{\infty} c_n z^n, c_n = 0, n = -1, 0, 1, 2, \dots$

(иначе: $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)z^2 = \infty$). Тогда $f(z) = \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \dots$;

$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)z^2 = \lim_{z \rightarrow \infty} (c_{-2} + \frac{c_{-3}}{z} + \dots) = c_{-2} = 1$.

$I = \int_{|z|=2} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{res}_{a_k} f(z)$, где $a_k, k=1, m$ — особые точки внутри круга $\{z: |z| < 2\} \Rightarrow$ все $a_k, k=1, m$ — внутри круга $\{z: |z| \leq 1\}$ (т.к. $f \in A(\mathbb{C} \setminus \{z: |z| \leq 1\})$). Но тогда

$\sum_{k=1}^m \operatorname{res}_{a_k} f(z) = -\operatorname{res}_{\infty} f(z) = 0 = -c_{-1} \Rightarrow I = 0$.

Не проверено

№ 20.3

$w = f(z)$
аналитическа в
круга $|z| < 1$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) z^2 = 1$$

$$\oint_{|z|=2} f(z) dz = ?$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$

$$f(z) z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^{n+1}$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) z^2 = 1 \Rightarrow$$

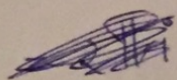
$$\left\{ \begin{array}{l} c_n = 0, \quad n \geq -1 \\ c_n \text{ можно не} \\ \text{рассматривать, так} \\ \text{как их связывает } \infty, \\ \text{если } n \leq -3 \end{array} \right.$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} c_n z^n$$

$$c_{-2} = 1$$

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma} \sum_{n=-\infty}^{-2} c_n z^n dz = \oint_{\gamma} \sum_{n=2}^{+\infty} c_{-n} z^{-n} dz =$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \left[c_{-n} \oint_{\gamma} z^{-n} dz \right] = \left\{ \oint_{\gamma} z^{-n} dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases} \right\} = 0$$



Ну конечно γ не ветку, но ответ ~~верный~~
сверенный. Задание почти такое же, как
19.3, просто квадрата в $\lim$
нет.

Ответ: 0

Не проверено

№20.4)

$$I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{y} dy$$

$$x \in (a; b) = D$$

$$0 \notin (a; b)$$

Упр. Дирхле

$$f(x, y) = \cos(xy) \quad g(x, y) = \frac{1}{y}$$

$$\begin{aligned} 1) \int_1^p f(x, y) dy &= \int_1^p \cos(xy) dy = \\ &= \frac{\sin(xy)}{x} \Big|_1^p = \frac{\sin xp - \sin x}{x} \end{aligned}$$

$$\left| \int_1^p f(x, y) dy \right| \leq \frac{|\sin xp - \sin x|}{|x|} \leq \frac{2}{|x|} \leq \frac{2}{\min\{|a|; |b|\}}$$

$$2) \lim_{y \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |g(x, y)| = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} \frac{1}{|y|} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{|y|} = 0$$

Тогда по признаку Дирхле $I(x)$ сходится
равномерно на $\forall$ интервале без нуля

485.

Не проверено

✓4) Пусть $f(x, y) = \frac{\cos(xy)}{x}$. $f(x, y) \in C([a, +\infty) \times Y)$,

где $a=1$, $Y=(0, 1)$.

$\forall y \in (0, 1) \exists \int_1^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{x} dx = I(y)$ (по Дирихле-Абелю для несобств. интеграла по параметру)

Пусть $y \in [y_1, y_2]$: $0 < y_1 < y < y_2 < 1$. Тогда:

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{x} dx \right| = \left| \int_1^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y} \right| = \left| \frac{\sin ty - \sin y}{y} \right| \leq \frac{2}{y_1};$$

$\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, $\frac{1}{x}$ монот. по x $\forall y \in [y_1, y_2] \Rightarrow I(y)$ св-ва равн. на $[y_1, y_2]$ по прил. Дирихле-Абеля $\Rightarrow I(y)$ непр. на $[y_1, y_2]$. П.к. y_1, y_2 - произвольн. из $(0, 1)$, то $I(y)$ непр. на $(0, 1)$.

Но $I(y)$ не св-ва равн. на $(0, 1)$: $\exists \varepsilon = \frac{2}{2\pi} : \forall A \geq 1$

$\exists R_1 = \frac{\pi n}{2} \geq A, R_2 = 2\pi n \geq A, \exists y = \frac{1}{n} \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{R_1}^{R_2} \frac{\cos(xy)}{x} dx \right| &\geq \frac{1}{R_2} \left| \int_{R_1}^{R_2} \cos(xy) dx \right| = \frac{1}{R_2} \cdot \left| \frac{\sin(xy)}{y} \right|_{R_1}^{R_2} = \\ &= \frac{1}{R_2 y} \cdot |\sin R_2 y - \sin R_1 y| = \frac{1}{2\pi n \cdot \frac{1}{n}} \cdot \left| \sin 2\pi n \cdot \frac{1}{n} - \sin \frac{\pi n}{2} \cdot \frac{1}{n} \right| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left| \sin 2\pi - \sin \frac{\pi}{2} \right| = \frac{1}{2\pi} = \varepsilon. \Rightarrow \text{не св. равн. по кр. Коши} \end{aligned}$$

№. экз. билета 521

Наименование дисциплины:

Действительный и комплексный анализ (2 курс, 4 семестр)

1. Тригонометрические ряды Фурье: принцип локализации Римана
2. Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций. Теоремы Вейерштрасса.
3. Имеет ли конечный предел при $p \rightarrow \infty$ функция $B(p, p)$? Ответ обосновать.
4. Верно ли, что интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin xy}{y} dy$ является равномерно сходящимся на множестве $[1, \infty)$? Ответ обосновать.

~ 3

Handwritten derivation on grid paper:

$$B(p, p) = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = \left(\frac{p!}{p}\right) \cdot \frac{2p}{(2p)!}$$
$$= \frac{2}{p} \cdot \frac{p!}{(2p)!}$$

Below the first line, the Gamma function is defined:

$$\Gamma(p) = (p-1)! = \frac{p!}{p}$$

Arrows indicate the limit as $p \rightarrow \infty$:

$$\downarrow 0, p \rightarrow \infty \quad \rightarrow 0, p \rightarrow \infty$$

N°4

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin xy}{y} dy, [1, \infty)$$

$$\left| \int_0^{\infty} \sin xy dy \right| = \left| \frac{-\cos xy}{x} \Big|_0^{\infty} \right| = \left| \frac{-\cos xy}{x} - 1 \right| < 2 \quad \text{т.к. } \begin{cases} y \in [0, \infty] \\ x \in [1, \infty) \end{cases}$$

$$\frac{1}{y} \searrow 0 \text{ при } y \rightarrow \infty.$$

$\Rightarrow$ по ID-A интеграл сходится абсолютно

Ответ: да, верно

N3 $B(p, p) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{p-1} dx = \left\{ t = \frac{1}{1-x}; x = 1 - \frac{1}{t}; dx = \frac{dt}{t^2} \right\} =$
 $= \int_1^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{p-1} \left(\frac{1}{t}\right)^{p-1} \frac{dt}{t^2} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{t-1}{t}\right)^{p-1} \cdot \left(\frac{1}{t}\right)^{p-1} \cdot \frac{dt}{t^2} = \int_1^{+\infty} \frac{(t-1)^{p-1}}{t^{p+2}} dt.$

$p > 0$: $f(t, p) = \frac{(t-1)^{p-1}}{t^{p+2}}$ непрерывна на $[1, +\infty) \times (0, +\infty)$.

Пусть $t \rightarrow +\infty$: $I(p) \sim \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3}$ — с.с. $\Rightarrow I(p)$ с.с. по теореме сравнения

$\left| \frac{(t-1)^{p-1}}{t^{p+2}} \right| \leq \left| \frac{t^{p-1} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{p-1}}{t^{p+2}} \right| \leq \left| \frac{t^{p-1}}{t^{p+2}} \right| = \left| \frac{1}{t^3} \right|$
 $\Rightarrow I(p)$ непрерывна при $p > 0$.

$\lim_{p \rightarrow 0+0} I(p) = \lim_{p \rightarrow 0+0} \int_1^{+\infty} \frac{(t-1)^{p-1}}{t^{p+2}} dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2(t-1)} = \mathcal{I}$

$\frac{1}{t^2(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t-1} = \frac{t(t-1)A + (t-1)B + t^2C}{t^2(t-1)} = \frac{t^2A - tA + tB - B + t^2C}{t^2(t-1)}$

$\begin{cases} t^2: A + C = 0 \\ t: -A + B = 0 \\ 1: -B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -A = 1 \\ A = B = -1 \\ B = -1 \end{cases}$

$\mathcal{I} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t-1} - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \ln|t-1| \Big|_1^{+\infty} - \ln|t| \Big|_1^{+\infty} + \frac{1}{t} \Big|_1^{+\infty}$

№. экз. билета 522

Наименование дисциплины:

Действительный и комплексный анализ (2 курс, 4 семестр)

1. Уточнённые условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье на классе гёльдеровых функций.

2. Неопределённый интеграл и теорема о первообразной функций комплексного переменного. Теорема Морера.

3. Доказать, что интеграл $\int_1^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x} dx$ сходится неравномерно на интервале $(0,1)$, однако является на этом интервале непрерывной функцией.

4. Пусть $z_0 = \infty$ - изолированная особая точка функции $f(z)$. Показать, что вычет $f(z)$ в этой точке равен

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z(f(\infty) - f(z)).$$

✓ 4

12.5) Если $z_0 = \infty$ - устр. о.т., то $\operatorname{res}_\infty f = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(\infty) - f(z))$

□ $f(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots$

$\quad \quad \quad \parallel$

$\quad \quad \quad f(\infty)$

$\Rightarrow (f(z) - f(\infty))z = a_{-1} + \frac{a_{-2}}{z} + \dots$

$\operatorname{res}_\infty f = -a_{-1} = -\lim_{z \rightarrow \infty} (f(z) - f(\infty))z = \lim_{z \rightarrow \infty} (f(\infty) - f(z))z$

✓ 4

Пусть бесконечность является устранимой особой точкой функции f . Введем обозначение $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = f(\infty)$. Тогда

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(\infty) - f(z)). \quad (3)$$

Действительно, разложение функции f в ряд в окрестности бесконечности в этом случае имеет вид

$$f(z) = f(\infty) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^{-k},$$

откуда

$$z(f(z) - f(\infty)) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^{-k+1}.$$

Совершив в последнем равенстве предельный переход при $z \rightarrow \infty$, получим формулу (3).

№. экз. билета 523

Наименование дисциплины:

Действительный и комплексный анализ (2 курс, 4 семестр)

1. Тригонометрические ряды Фурье: условие сходимости в точке.
2. Функция Жуковского. Свойства конформного отображения, описываемого этой функцией.
3. Доказать, что производная аналитической в области G функции также является аналитической в этой области функций.
4. Пусть $f(x, y)$ определена и непрерывна на множестве $[a, +\infty) \times Y$ и для любого $y \in Y$ сходится интеграл $I(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$. Верно ли, что если для некоторой последовательности $\{a_n\} \rightarrow \infty$ последовательность $\phi_n(y) = \int_a^{a_n} f(x, y) dx$ равномерно сходится на Y , то и интеграл $I(y)$ сходится равномерно на Y ? Ответ обосновать.

№3

так как аналитическая функция f по
теореме о беск. дифф-ти аналитической ф-ии
бесконечно дифференцируема, значит $\forall$ точке обл. G
 f' также существует производная $\forall$ точке области
 G , равная f' . А значит по определению аналитичес-
кой ф-ии, функция f' - аналитическая в G
(ф-ия, дифф. $\forall$ точке обл., наз. аналитической
в области)

~ 4

От противного.

Пусть

$$\exists \varepsilon_0 \forall A > 0 \exists y : \left| \int_A^\infty f(x, y) dx \right| \geq \varepsilon_0.$$

Выберем последовательность $A_n \rightarrow \infty$, по ней построим последовательность y_n такую, что

$$\left| \int_{A_n}^\infty f(x, y_n) dx \right| \geq \varepsilon_0.$$

А мы предположили, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \forall n > N, \forall y \in Y \text{ справедливо } \left| \int_{A_n}^\infty f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

№. экз. билета 524

Наименование дисциплины:

Действительный и комплексный анализ (2 курс, 4 семестр)

1. Преобразование Фурье: определение и основные свойства.
2. Теоремы о вычетах и полной сумме вычетов. Вычет относительно полюса.
3. Доказать, что значение несобственного интеграла $\int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} \exp(-x^2) dx$ не зависит от выбора прямой интегрирования $\{z: \operatorname{Im} z = a\}$.
4. Пусть $f(x, y)$ непрерывна на множестве $[a, +\infty) \times [c, d]$ и $\int_a^\infty f(x, y) dx$ сходится равномерно на интервале (c, d) . Верно ли, что тогда этот интеграл сходится равномерно и на промежутке $[c, d]$? Ответ обосновать.

~4

Полезное утв-е Пусть $f(x, y)$ непрерывна на $[a, +\infty) \times [c, d]$ и $\int_a^\infty f(x, y) dx$ сход. равн. на (c, d) . Тогда он сход. равн. на $[c, d]$ в частн. сход. при $y=c, y=d$.

Д-во Из кр. Коши $\forall \varepsilon > 0 \exists R(\varepsilon) > a: \forall R', R'' \geq R(\varepsilon) \forall y \in (c, d)$

справ. $\left| \int_{R'}^{R''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon/2 \Rightarrow \forall y \in [c, d]$ справ. $\left| \int_{R'}^{R''} f(x, y) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

$\downarrow$
непр. ф-л на $[c, d]$ из т. 1 нрмн. 1-ч. $\Rightarrow \int_a^\infty f(x, y) dx$ сход. равн. на $[c, d]$

✓ 4) Полезное утв-е.

Из кр. Коши: $\forall \varepsilon > 0 \exists R(\varepsilon) \geq a: \forall R', R'' \geq R(\varepsilon), \forall y \in (c, d):$

$$\left| \int_{R'}^{R''} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \forall y \in [c, d]: \left| \int_{R'}^{R''} f(x, y) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad (\Rightarrow)$$

непр. ф-я, т.к. $f(x, y) \in C(\overbrace{[R', R'']^{[c, d]}}^{\text{параметр}})$, по теор. о непр-ти
св-ств. интеграла с параметром.

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \text{ с-ся равн. по кр. Коши на } [c, d]$$

№. экз. билета 525

Наименование дисциплины:

Действительный и комплексный анализ (2 курс, 4 семестр)

1. Преобразование Фурье: формула разложения функции в интеграл Фурье, условия разложимости.

2. Свойства аналитических функций. Геометрический смысл производной.

3. Используя тригонометрические ряды Фурье, доказать формулу Эйлера: $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6$.

4. Существует ли функция $f(z)$, аналитическая в области

$\{z \in \mathbb{C}: |z| < 2\}$ такая, что $f(z) = \bar{z}$ при $|z| = 1$? Ответ обосновать.

НА 1 БАЛЛ !!

14) Существует ли функция $f(z)$, аналитическая в области $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 2\}$, такая, что $f(z) = \bar{z}$ при $|z| = 1$? Ответ обосн.

Ответ: нет, не может, для док-ва покажем, что f -я не может быть аналитич., так как если разл. част. произв. (кас. пр-ва)

$$f(z) = \bar{z} = \overline{x+iy} = x-iy \Rightarrow U(x,y) = x, \quad V(x,y) = -y$$

$$\text{Усл-е Коши-Римана: } \begin{cases} U_x = V_y \\ U_y = -V_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \neq -1 & \text{в всех } \tau \\ 0 = 0 & \text{кажд. точке } z \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f -я $f(z) = \bar{z}$ не доп. во всех τ , каковы-н-ти z .
т.е.

№4.

~~Задание Парсеваля:~~

~~$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x) dx, \text{ где } f(x) \in R[-L, L]$$~~

~~где a_n, b_n — коэффициенты Фурье, $f(x) \in R[-L, L]$~~

] $f(x) = x^2, x \in [-\pi, \pi]$

п.к. $f(x)$ — четная, то $b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x^2}{n} d(\sin nx) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2}{n} \cdot \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx d(x^2) \right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n} \left(\int_0^{\pi} 2x \sin nx \, dx \right) = -\frac{4}{\pi n^2} \left(-\int_0^{\pi} x d(\cos nx) \right) =$$

$$= \frac{4}{\pi n^2} \left(x \cos nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \right) = \frac{4}{\pi n^2} \left(\pi (-1)^n - \frac{1}{n} \sin \pi n \right) =$$

$$= (-1)^n \frac{4}{n^2}$$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx = x^2 \quad (*)$$

Для $f(x)$ берем (*):

~~$$\frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^4 \, dx$$~~

При $x = \pi$:

$$(*) : \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos \pi n = \pi^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

~ 3

Один из простейших методов получения данной суммы — использование аппарата разложения в ряд Фурье функции $f(x) = x^2$. Для чётной функции это разложение имеет вид^[19]

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Коэффициенты a_n вычисляются по стандартным формулам:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = (-1)^n \frac{4}{n^2}.$$

В итоге разложение приобретает вид^[19]

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4 \cos(nx)}{n^2}.$$

Подстановка в эту формулу значения $x = \pi$ даёт результат

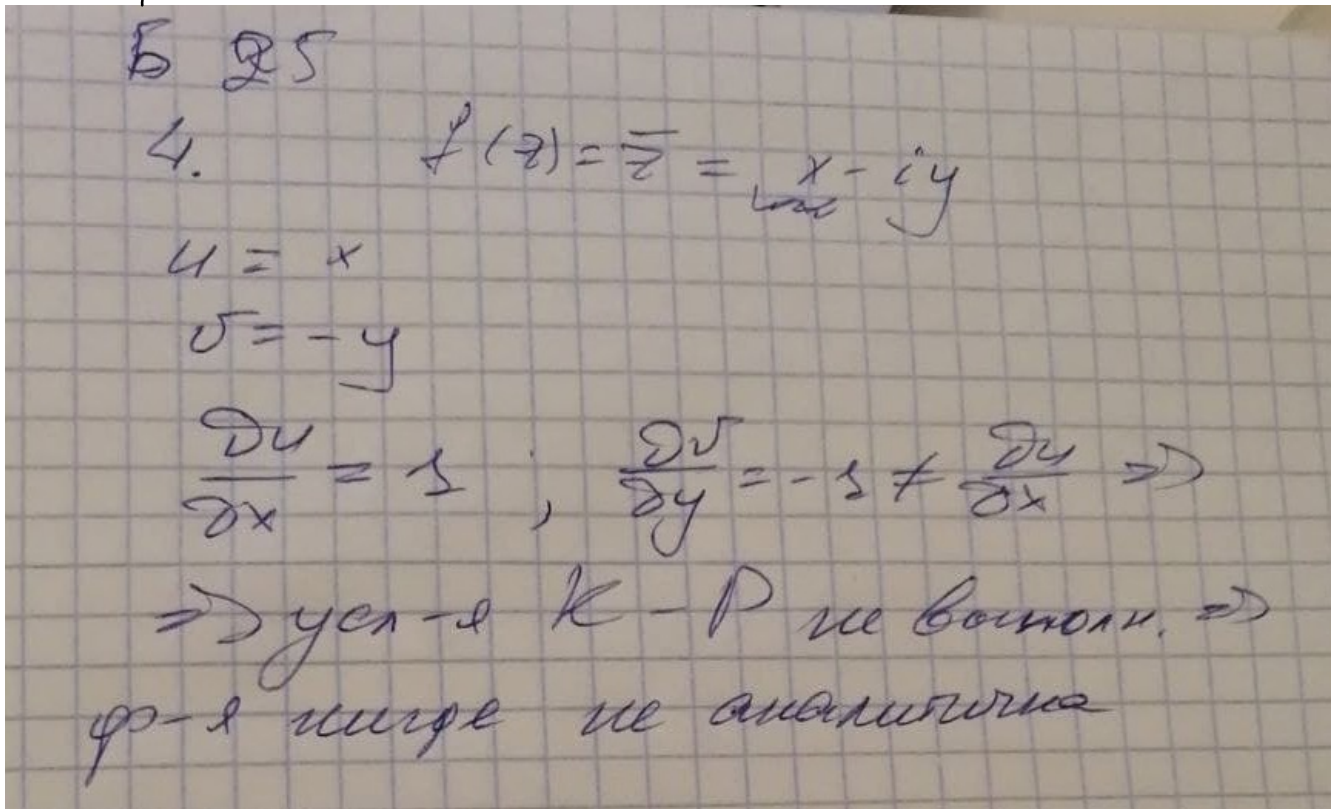
$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4(-1)^n}{n^2},$$

или

$$\frac{2}{3} \pi^2 = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Окончательный результат получается^[19] при делении обеих сторон на 4.

~ 4



№. экз. билета 526

Наименование дисциплины:

Действительный и комплексный анализ (2 курс, 4 семестр)

1. Тригонометрические ряды Фурье: принцип локализации Римана.

2. Показательная функция и гиперболические функции. Свойства конформных отображений, осуществляемых этими функциями.

3. Доказать, что интеграл $\int_{\alpha}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x+\alpha} dx$ является непрерывной функцией параметра α при всех $\alpha > 0$.

4. Вычислить $\int_{|z|=100} \frac{z^{2021}}{(z^{2020}+1)^2} dz$.

~ 4

$$\begin{aligned} \int_{|z|=100} \frac{z^{2021}}{(z^{2020}+1)^2} dz &= -2\pi i \operatorname{res}_{\infty} \left(\frac{z^{2021}}{(z^{2020}+1)^2} \right) = -2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow \infty} z \left(f(z) - f(\infty) \right) = \\ &= -2\pi i \lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot \left(0 - \frac{z^{2021}}{(z^{2020}+1)^2} \right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^{2022}}{z^{2022} \left(\frac{z^{2020}}{z^{2022}} + \frac{1}{z^2} \right)^2} = \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^{2022}}{z^{4040} + 2z^{2020} + 1} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^{2018} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^{2022}}} = 0 \end{aligned}$$

~3

926

13. (1): $\int_{\alpha}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x+\alpha} \in C(0; +\infty)$

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x+\alpha} = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{dx = \alpha dt} = \int_1^{\infty} \frac{\sin \alpha^2 t}{\alpha(t+1)} \alpha dt =$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{\sin \alpha^2 t}{t+1} dt$$

$\forall \alpha_0 > 0 \exists \alpha_1, \alpha_2: 0 < \alpha_1 < \alpha_0 < \alpha_2$

Док-м, что $I(\alpha)$ св-ся р-но на $[\alpha_1, \alpha_2]$

$\Rightarrow$ непрерывна на $[\alpha_1, \alpha_2] \Rightarrow$ непрерывна $\forall \alpha_0 > 0$.

на $[\alpha_1, \alpha_2]$:

$$\left| \int_{R_1}^{R_2} \sin \alpha^2 t dt \right| \leq \frac{1}{\alpha^2} \left| \int_{R_1}^{R_2} \cos \alpha^2 t dt \right| \leq \frac{2}{\alpha^2} \leq \frac{2}{\alpha_1^2}$$

$\Rightarrow$ $\uparrow$ р-но св-е.

$\frac{1}{t+1}$ р-но св-е св-е к 0, монот.

Сред-но, $I(\alpha)$ св-ся р-но на $[\alpha_1, \alpha_2]$ по

пр. Дир-Аб. $\Rightarrow$ з.п.г.

№4 $I = \int_{|z|=100} \frac{z^{2021}}{(z^{2020} + 1)^2} dz$

$z^{2020} = -1 \Rightarrow \exists 2020$ корней $z_k, |z_k| = 1, k = \overline{1, 2020} \Rightarrow$ все z_k наход. внутри круга $\{|z| \leq 100\}$. $\Rightarrow$

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{2020} \operatorname{res}_{z_k} f(z), \quad f(z) = \frac{z^{2021}}{(z^{2020} + 1)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{2020} \operatorname{res}_{z_k} f(z) = -\operatorname{res}_{\infty} f(z)$$

$$f(z) = \frac{z^{2021}}{z^{4040} \left(1 + \frac{1}{z^{2020}}\right)^2} = \frac{1}{z^{2019}} \cdot \left(1 - \frac{1}{z^{2020}} + \frac{1}{z^{4040}} - \dots\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{z^{2019}} - \frac{2}{z^{4039}} + \frac{1}{z^{6059}} + \dots \Rightarrow C_{-1} = 0 \Rightarrow I = 2\pi i \cdot C_{-1} = 0$$

826 n 4.

$$\int_{|z|=100} \frac{z^{2021}}{(z^{2020}+1)^2} dz = ?$$

Особенности только внутри контура и на бес-ти, ∞ — устранимая, т.к. $\lim_{z \rightarrow \infty} = 0$

$$\Rightarrow -2\pi i \operatorname{res}_{\infty} f = -2\pi i \lim_{z \rightarrow \infty} z \left(f(\infty) - f(z) \right)$$

$$= -2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow \infty} - \frac{z^{2022}}{(z^{2020}+1)^2} = 0$$

~ 4

$$\int_{|z|=100} \frac{z^{2021}}{(z^{2020}+1)^2} dz = -2\pi i \operatorname{res}_{\infty} f = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^{2021}}{(z^{2020}+1)^2} = 0 \rightarrow \infty - \text{убр. остаток}$$

Значит $\operatorname{res}_{\infty}$ можно считать по гр-те:

$$\operatorname{res}_{\infty} f = \lim_{z \rightarrow \infty} z \left(f(\infty) - f(z) \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} - \frac{z^{2022}}{(z^{2020}+1)^2} = 0$$

Ответ: 0